Université Paul Sabatier
Licence STS – Parcours PC
Physique – L1

Thème 4 – Systèmes physiques régis par une équation différentielle du second ordre

2009–2010, durée : 3 h

Conformément à l'usage typographique international, les vecteurs sont représentés en gras

A – Question de cours

A–1 : Équation différentielle générale

On étudie un phénomène physique pouvant être modélisé par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0$$

où τ et ω sont des constantes.

1. Quelles sont les dimensions physiques de τ et ω ? Quelle est l'origine du terme $\frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$?
2. Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle.
3. On définit le facteur de qualité $Q = \omega\tau$. Donner l'expression générale des solutions dans les 3 cas suivants : $Q < 1/2$, $Q = 1/2$ et $Q > 1/2$, en précisant la nature du régime correspondant.

A–2 : Quelques forces

Énoncer la 2$^{\text{e}}$ Loi de Newton.
Rappeler l'expression des différentes forces : force de rappel, poids, et force de frottement visqueux.

B – Exercices et problèmes

B–1. Mouvement périodique d'une masse liée à un ressort

On considère une masse m qui se déplace sans frottement sur un axe horizontal (Ox) et qui est soumise à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur K : $\mathbf{F} = -Kx\mathbf{e}_x$, x étant la position de cette masse par rapport à la position d'équilibre.

1. Montrer que l'équation différentielle donnant la position de cette masse est :

   $$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -Kx.$$

   Mettre cette équation sous la forme :

   $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

   en donnant l'expression de ω_0. Calculer ω_0 pour $m = 0{,}1$ kg et $K = 10$ kg.s^{-2}.

2. Donner la solution générale de cette équation sous forme d'une combinaison linéaire d'exponentielles.
3. Montrer que la solution peut aussi se mettre sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} x(t) &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \\ x(t) &= a_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ x(t) &= a_2\sin(\omega_0 t + \phi_2) \end{aligned}$$

   où A, B, a_1, a_2, ϕ_1 et ϕ_2 sont des constantes que l'on reliera entre elles. Préciser la solution correspondant aux conditions initiales $x(t=0) = x_0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$. Tracer la courbe $x(t)$. En déduire la période T du mouvement.
4. Préciser la solution correspondant aux conditions initiales $x(t=0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0$. Tracer la courbe $x(t)$. En déduire la période T du mouvement.
5. Préciser la solution correspondant aux conditions initiales $x(t=0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$. Que peut-on dire du mouvement dans ce cas ?
6. La masse m est à présent suspendue à un ressort vertical. Elle se déplace ainsi suivant l'axe vertical (Oz). La force de rappel du ressort s'écrit alors $\mathbf{F} = -Kz\mathbf{e}_z$, où z est la position de la masse m par rapport à la longueur à vide du ressort (c'est-à-dire avant qu'on ne suspende la masse m).
   Montrer que l'équation différentielle donnant la position de cette masse est maintenant :

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -Kz - mg$$

   (on précisera ce qu'est la constante g et on discutera en détail la signification des différents signes dans cette équation, en fonction de l'orientation de l'axe Oz). Donner la solution générale de cette équation. Préciser la solution correspondant aux conditions initiales $z(t=0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_0$.
7. Donner un autre exemple d'oscillateur harmonique en mécanique, en précisant notamment la période. Commenter.

B–2. Évolution de la charge d'un condensateur dans un circuit RLC

On considère un circuit constitué d'un interrupteur, d'une résistance R, d'un condensateur de capacité C initialement non chargé, et d'une bobine d'inductance L, montés en série et polarisés par une batterie de force électromotrice E constante. À l'instant initial on ferme l'interrupteur.

1. Montrer que les lois de l'électrocinétique conduisent à l'équation différentielle :

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E$$

   où $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ est l'intensité du courant électrique et q la charge du condensateur. Cette équation différentielle peut aussi se mettre sous la forme (vérifiez-le !) :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{LC} = \frac{E}{L}$$

2. Donner la solution générale $q_H(t)$ de l'équation sans second membre dans le cas où $R^2 < 4L/C$ (*régime sous-critique*) en fonction des constantes suivantes dont on donnera la dimension physique :

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ et } \omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

   Au fait, que vaut ω_0 dans ce cas (comparer à la question de cours) ?

3. Vérifier que la solution particulière est de la forme $q_P(t) = C_1$ où C_1 est une constante à déterminer.
4. Donner la solution générale de l'équation différentielle et tracer la solution pour $R = 0{,}1\ \Omega$, $L = 100\ \mu$H et $C = 1$ mF.
5. Déduire l'expression de $q(t \to \infty)$.
6. Donner la solution générale de l'équation sans second membre dans le cas où $R^2 = 4L/C$ (*régime critique*) en fonction de la constante $\tau = L/R$ et en déduire la solution générale de l'équation différentielle. On prendra $R = 0{,}6325\ \Omega$, $L = 100\ \mu$H, et $C = 1$ mF.
7. Donner la solution générale de l'équation sans second membre dans le cas où $R^2 > 4L/C$ (*régime sur-critique*) en fonction des constantes suivantes :

$$\tau = \frac{L}{R} \text{ et } \Omega = \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

   et en déduire la solution générale de l'équation différentielle. On prendra $R = 1\ \Omega$, $L = 100\ \mu$H, et $C = 1$ mF.